

EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK

1  Adj meg olyan másodfokú egyenletet, melynek két gyöke:

a) 12 és 21;

b) $-\frac{3}{7}$ és $-\frac{17}{10}$!

Megoldás:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Mivel bármilyen főegyütthatóval (a) rendelkező egyenlet megfelel, a legegyszerűbb esetben válasszuk az $a = 1$ értéket.

a) Gyökök: 12 és 21

A gyöktényezős alakot felírjuk, majd tagonként beszorozzuk:

$$(x - 12)(x - 21) =$$

$$= x^2 - 21x - 12x + 252 =$$

$$x^2 - 33x + 252 = 0$$

b) Gyökök: $-\frac{3}{7}$ és $-\frac{17}{10}$

A gyöktényezős alak felírása után közös nevezőre hozunk, majd 70-nel szorzunk:

$$(x + \frac{3}{7})(x + \frac{17}{10}) =$$

$$= x^2 + \frac{17}{10}x + \frac{3}{7}x + \frac{51}{70} =$$

$$= x^2 + \frac{149}{70}x + \frac{51}{70} =$$

$$70x^2 + 149x + 51 = 0$$

2.  Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $3x - x^2 > 0$

b) $x^2 - 4,5x - 9 < 0$

Megoldás:

a) Egyenlőtlenség: $3x - x^2 > 0$

1. Zérushelyek meghatározása (ahol a kifejezés nulla):

Emeljünk ki x -et a kifejezésből:

$$x(3 - x) = 0$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla:

$$x_1 = 0$$

$$3 - x = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$

2. A függvény elemzése:

Az $f(x) = -x^2 + 3x$ függvény egy másodfokú függvény (parabola).

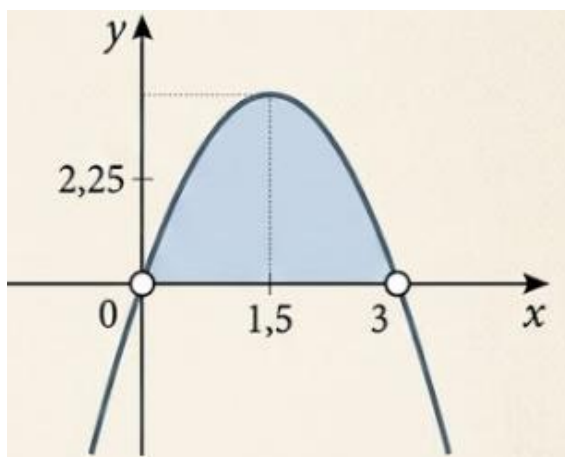
Mivel az x^2 együtthatója negatív (-1), a parabola lefelé nyílik.

3. Grafikus szemléltetés:

A grafikonon látható, hogy a görbe a két zérushely között (0 és 3) halad az x -tengely felett.

Mivel a feladat azt kérdezi, mikor nagyobb a kifejezés nullánál (> 0), ezért ez a középső tartomány a megoldás.

Megoldás: $0 < x < 3$ vagy $x \in]0; 3[$



b) Egyenlőtlenség: $x^2 - 4,5x - 9 < 0$

1. Zérushelyek kiszámítása:

A megoldóképlet alapján: $x_{1,2} = \frac{4,5 \pm \sqrt{20,25 + 36}}{2} = \frac{4,5 \pm 7,5}{2}$

A két metszéspont: $x_1 = -1,5$ és $x_2 = 6$.

2. A grafikon alakja:

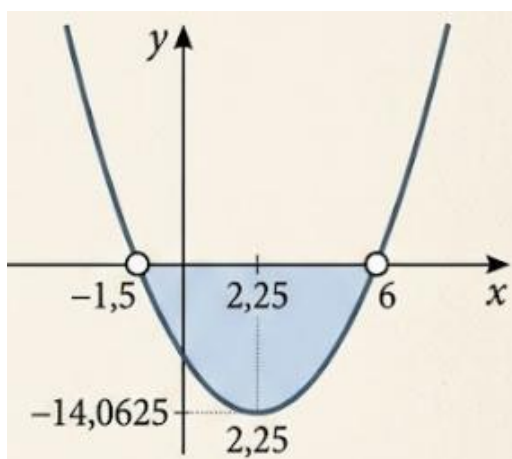
Mivel az x^2 együtthatója pozitív (1), a parabola **felfelé nyílik**.

3. Értelmezés:

A grafikonról látszik, hogy a függvény a két zérushely között halad az x-tengely alatt (vagyis itt negatív).

Mivel a feladat a < 0 tartományt keresi:

Megoldás: $-1,5 < x < 6$



3  Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\sqrt{x+3} = \frac{x}{2}$ **b)** $\sqrt{2x+4} = x+2$

Megoldás:

Irracionális egyenletek esetén két fontos szabályt kell figyelembe vennünk:

1. A négyzetgyök alatti kifejezés nem lehet negatív.
2. A négyzetgyök értéke definíció szerint nemnegatív, így az egyenlőség másik oldalának is annak kell lennie.

a) $\sqrt{x+3} = \frac{x}{2}$

• Kikötések:

- Gyök alatti rész: $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$
- Eredmény (jobb oldal): $\frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
- Közös feltétel: $x \geq 0$

• Megoldás:

$$(\sqrt{x+3})^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3 = \frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -2$$

Mivel $x_2 = -2$ nem felel meg az $x \geq 0$ kikötésnek, ezért:

Megoldás: $x = 6$

b) $\sqrt{2x+4} = x+2$

- Kikötések:
 - Gyök alatti rész: $2x+4 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -4 \Rightarrow x \geq -2$
 - Eredmény (jobb oldal): $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$
 - Közös feltétel: $x \geq -2$
- Megoldás:

$$(\sqrt{2x+4})^2 = (x+2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+4 = x^2+4x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$$

Mivel mindkét érték megfelel az $x \geq -2$ kikötésnek:

Megoldások: $x_1 = 0, x_2 = -2$

4. Egy derékszögű útkereszteződésből indul két kerékpáros. Az első észak felé halad, és másodpercenként 4,5 m-t tesz meg. A második 5 másodperccel később indul kelet felé, és másodpercenként 5,5 m-t tesz meg.

Hány másodpercig lesznek – légvonalban – 500 m-nél közelebb egymáshoz?

Megoldás:

1. Az adatok kigyűjtése és a mozgás leírása:

- Első kerékpáros: Észak felé halad $v_1 = 4,5$ m/s sebességgel.
- Második kerékpáros: 5 másodperc késéssel indul Kelet felé $v_2 = 5,5$ m/s sebességgel.
- Cél: Megkeresni azt a t időtartamot (másodpercben), amíg a légvonalbeli távolságuk $D < 500$ m.

2. A megtett utak felírása t idő függvényében:

- Legyen t az első kerékpáros indulása óta eltelt idő.
- Az északi irányú elmozdulás: $d_1 = 4,5 \cdot t$
- A keleti irányú elmozdulás (mivel 5 mp-cel később indul): $d_2 = 5,5 \cdot (t - 5)$

3. Összefüggés felírása (Pitagorasz-tétel):

Mivel az északi és keleti irány merőleges egymásra, a távolságuk négyzete:

$$D^2 = d_1^2 + d_2^2$$

Azt az állapotot keressük, amikor $D^2 < 500^2$ (azaz 250 000):

$$(4,5t)^2 + (5,5(t - 5))^2 < 250\,000$$

4. Az egyenlőtlenség megoldása:

- Négyzetre emelés és kibontás:

$$20,25t^2 + 30,25(t^2 - 10t + 25) < 250\,000$$

$$20,25t^2 + 30,25t^2 - 302,5t + 756,25 < 250\,000$$

- Rendezés standard másodfokú alakra:

$$50,5t^2 - 302,5t - 249\,243,75 < 0$$

- A pozitív zérushely meghatározása megoldóképlettel:

$$t = \frac{302,5 + \sqrt{302,5^2 - 4 \cdot 50,5 \cdot (-249\,243,75)}}{2 \cdot 50,5}$$

$$t = \frac{302,5 + \sqrt{50\,438\,743,75}}{101} \approx \frac{302,5 + 7102}{101} \approx 73,31$$

Válasz: A kerékpárosok az első indulásától számítva körülbelül 73,3 másodpercig lesznek légvonalban 500 méternél közelebb egymáshoz.

5  Egy, a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvény két zérushelye -3 és 5 , főegyütthatója $-0,5$.

a) Írd fel a függvény hozzárendelési szabályát!

b) Határozd meg a függvény szélsőértékét, és azt is, hogy hol veszi fel ezt a szélsőértéket!

c) Add meg a függvény értékkészletét!

Megoldás:

Adatok:

- Zérushelyek: $x_1 = -3$ és $x_2 = 5$
- Főegyüttható: $a = -0,5$

a) Írd fel a függvény hozzárendelési szabályát!

A másodfokú függvény felírható a gyöktényezős alak segítségével:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$f(x) = -0,5 \cdot (x - (-3)) \cdot (x - 5)$$

$$f(x) = -0,5 \cdot (x + 3) \cdot (x - 5)$$

A zárójelek felbontása után:

$$f(x) = -0,5 \cdot (x^2 - 5x + 3x - 15) =$$

$$= -0,5 \cdot (x^2 - 2x - 15) =$$

$$f(x) = -0,5x^2 + x + 7,5$$

b) Határozd meg a függvény szélsőértékét, és azt is, hogy hol veszi fel!

A másodfokú függvény szimmetrikus, így a szélsőérték helye (x-koordinátája) pontosan a két zérushely számtani közepe:

$$x_{sz} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

A szélsőérték nagyságát az $x = 1$ behelyettesítéssel kapjuk meg:

$$\begin{aligned}y_{sz} &= f(1) = -0,5 \cdot (1 + 3) \cdot (1 - 5) = \\&= -0,5 \cdot 4 \cdot (-4) = -2 \cdot (-4) = 8\end{aligned}$$

Mivel a főegyüttható negatív ($a = -0,5$), a parabola lefelé nyílik, tehát a függvénynek maximuma van.

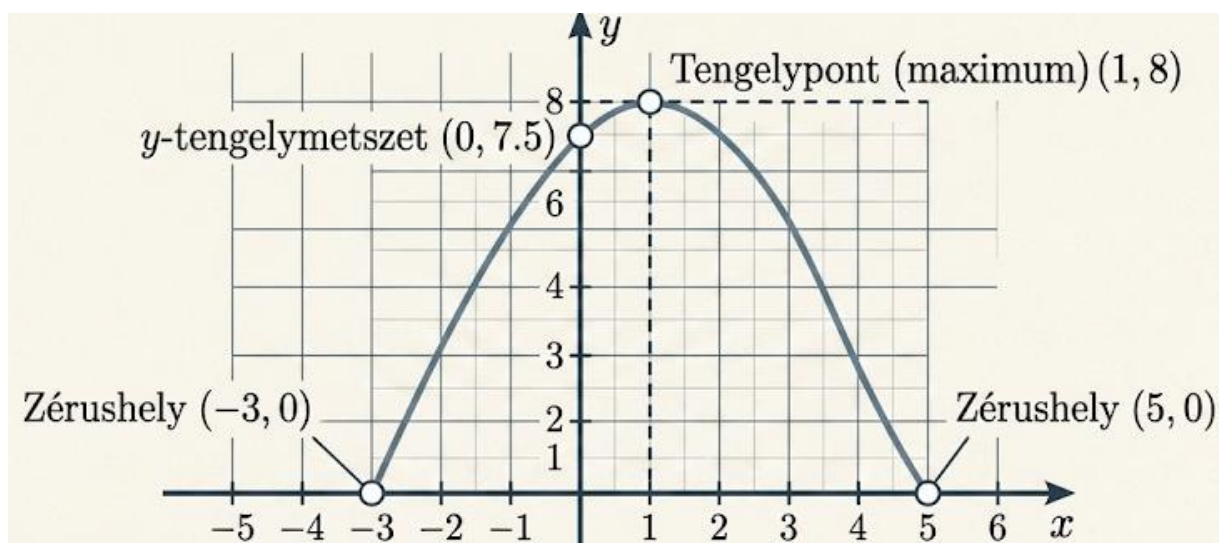
A függvénynek maximuma van az $x = 1$ helyen, a maximum értéke $y = 8$.

c) Add meg a függvény értékkészletét!

Az értékkészletet a szélsőérték típusa és értéke határozza meg.

Mivel a függvénynek maximuma van 8-nál, és onnan lefelé minden értéket felvesz:

$\mathbf{R_f : } y \leq 8$ vagy $y \in] - \infty ; 8]$ (valós számok halmazán).



Grafikus elemzés:

A parabola lefelé nyílik (mivel $a = -0.5$).

Az $x = 1$ a szimmetriatengely, amely felezi a két zérushely közötti távolságot.

A maximum érték 8, amely a csúcsponton található.

A függvény szimmetrikus a függőleges $x = 1$ egyenesre.



(Érettségi feladat, 2007) Egy televíziós vetélkedőn 20 játékos vesz részt. A műsorvezető kérdésére a lehetséges három válasz közül kell a játékosoknak az egyetlen helyes megoldást kiválasztani, melyet az A , a B vagy a C gomb megnyomásával jelezhetnek. A vetélkedő három fordulóból áll, minden fordulóban négy kérdésre kell válaszolni. Amelyik versenyző hibásan válaszol, 0 pontot kap. A helyes válaszáért annyi pont jár, ahány helytelen válasz született (pl.: ha Péter jól válaszol és 12-en hibáznak, akkor Péter 12 pontot szerez). Hány játékosnak kell helyesen válaszolnia egy adott kérdésre ahhoz, hogy a 20 játékosnak erre a kérdésre adott összpontszáma a lehető legtöbb legyen?

Megoldás:

1. Az adatok értelmezése:

- Összes játékos száma: 20 fő.
- Helytelen válaszáért járó pont: 0 pont.
- Helyes válaszáért járó pont: Annyi pont, ahányan hibáztak.
- Kérdés: Hány jó válaszadó esetén lesz a csoport összesített pontszáma a legtöbb?

2. Matematikai modell felállítása:

Legyen x a helyesen válaszolók száma. Ekkor:

- A helytelenül válaszolók száma: $20 - x$
- Egy helyes válaszáért járó pontszám: $20 - x$
- Az x számú nyertes összesített pontszáma: $P(x) = x \cdot (20 - x)$

Az összpontszám függvénye:

$$P(x) = x \cdot (20 - x)$$

$$P(x) = -x^2 + 20x$$

3. A maximum meghatározása:

A zérushelyeket ott találjuk, ahol a függvényérték nulla:

$$-x^2 + 20x = 0$$

Az együtthatók azonosítása:

$$a = -1$$

$$b = 20$$

$$c = 0$$

A megoldóképlet alkalmazása:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 0}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm 20}{-2}$$

A két megoldás:

$$x_1 = \frac{-20+20}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$x_2 = \frac{-20-20}{-2} = \frac{-40}{-2} = 20$$

A $P(x)$ függvény egy lefelé nyíló parabola, melynek zérushelyei $x_1 = 0$ és $x_2 = 20$.

A maximum helye a két zérushely számtani közepe:

$$x_{\max} = \frac{0+20}{2} = 10$$

4. Ellenőrzés:

- Ha 10-en válaszolnak jól: $10 \text{ fő} \cdot 10 \text{ pont} = 100 \text{ pont}$.
- Ha 9-en válaszolnak jól: $9 \text{ fő} \cdot 11 \text{ pont} = 99 \text{ pont}$.
- Ha 11-en válaszolnak jól: $11 \text{ fő} \cdot 9 \text{ pont} = 99 \text{ pont}$.

Válasz: Pontosan 10 játékosnak kell helyesen válaszolnia ahhoz, hogy a 20 játékos összpontszáma a lehető legtöbb (100 pont) legyen.

7 (Érettségi feladat, 2007)

- a)** Oldja meg a $7 + x < -2 \cdot (x - 2)$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
- b)** Oldja meg az $x^2 + x - 6 \leq 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
- c)** Legyen az A halmaz az a) alatti egyenlőtlenség megoldáshalmaza, B pedig a b) alatti egyenlőtlenség megoldáshalmaza. Adja meg az $A \cup B$, $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat!

Megoldás:

a) Az elsőfokú egyenlőtlenség

$$7 + x < -2 \cdot (x - 2)$$

1. Zárójelbontás: A jobb oldalon a -2 -vel beszorozzuk a zárójel minden tagját.

- $-2 \cdot x = -2x$
- $-2 \cdot (-2) = +4$

$$\Rightarrow 7 + x < -2x + 4$$

2. Rendezés:

Cél, hogy az x -es tagok az egyik, a számok a másik oldalon legyenek.

- Adjunk mindkét oldalhoz $2x$ -et: $7 + 3x < 4$
- Vonjunk ki mindkét oldalból 7 -et: $3x < -3$

3. Osztás: Osszuk 3 -mal (mivel pozitívval osztunk, az irány nem változik).

- $x < -1$

Halmaz alakban (A): $] - \infty; -1[$

b) A másodfokú egyenlőtlenség

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$

1. Zérushelyek (egyenletként kezelve): $x^2 + x - 6 = 0$

- Használjuk a megoldóképletet: $a = 1, b = 1, c = -6$
- $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$
- $x_1 = \frac{4}{2} = 2$
- $x_2 = \frac{-6}{2} = -3$

2. Intervallum meghatározása:

- A kifejezés egy felfelé nyíló parabolát ír le (mivel x^2 együtthatója $+1$).
- A parabola a két zérushely között halad a tengely alatt (ott negatív).
- Mivel ≤ 0 a kérdés, a határok is beletartoznak.

Halmaz alakban (B): $[-3; 2]$

c) Halmazműveletek elemzése

Képzeljük el a számegyenest:

- **A** halmaz: Minden szám, ami balra van a -1-től (nyitott kör a -1-nél).
- **B** halmaz: A -3 és a 2 közötti szakasz (teli körök a végeken).

1. $A \cup B$ (Unió):

Mindent összeöntünk. A -3-nál kisebb számok az A-ból jönnek, a -3 és 2 közöttiek pedig mindkét halmazból vagy csak a B-ből. Az eredmény a teljes szakasz a 2-estől balra.

$$A \cup B =] - \infty; 2]$$

2. $A \cap B$ (Metszet):

Ahol a két halmaz fedi egymást. Ez a -3-nál kezdődik (ott mindkettőben benne van) és tart -1-ig. De vigyázat: a -1 az A-ban nincs benne, így a közös részben sem lesz benne!

$$A \cap B = [-3; -1[$$

3. $B \setminus A$ (Különbség): A B-ből kivesszük azokat, amik A-ban is benne vannak.

Az A halmaz a -1-nél kisebb számokat "viszi el". Marad a -1 és a 2 közötti rész.

Mivel a -1 nem volt benne az A-ban, ezért azt nem tudta elvinni, tehát a -1 megmarad a B-ben.

$$B \setminus A = [-1; 2]$$

1. Írd fel gyöktényezős alakban a következő kifejezéseket!

a) $2x^2 - 17x - 84$

b) $-3x^2 + 22x + 80$

Megoldás:

A másodfokú kifejezések gyöktényezős alakja: $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Ahol a a főegyüttható, x_1 és x_2 pedig a kifejezéshez tartozó egyenlet zérushelyei.

a) $2x^2 - 17x - 84$

1. Zérushelyek meghatározása (megoldóképlettel):

$$a = 2, b = -17, c = -84$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-84)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 + 672}}{4} = \frac{17 \pm \sqrt{961}}{4} = \frac{17 \pm 31}{4}$$

$$\bullet \quad x_1 = \frac{17+31}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

$$\bullet \quad x_2 = \frac{17-31}{4} = \frac{-14}{4} = -3,5$$

2. Behelyettesítés a gyöktényezős alakba:

$$2 \cdot (x - 12) \cdot (x - (-3,5))$$

Válasz: $2 \cdot (x - 12) \cdot (x + 3,5)$

b) $-3x^2 + 22x + 80$

1. Zérushelyek meghatározása:

$$a = -3, b = 22, c = 80$$

$$x_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 80}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{484 + 960}}{-6} = \frac{-22 \pm \sqrt{1444}}{-6} = \frac{-22 \pm 38}{-6}$$

- $x_1 = \frac{-22+38}{-6} = \frac{16}{-6} = -\frac{8}{3} \approx -2,67$

- $x_2 = \frac{-22-38}{-6} = \frac{-60}{-6} = 10$

2. Behelyettesítés a gyöktényezős alakba:

$$-3 \cdot (x - (-8/3)) \cdot (x - 10)$$

Válasz: $-3 \cdot (x + \frac{8}{3}) \cdot (x - 10)$

2  Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletet!

$$\sqrt{3x+1} = x-1$$

Megoldás:

1. Kikötések (Értelmezési tartomány):

- Gyök alatti kifejezés nemnegatív:

$$3x+1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

- A négyzetgyök értéke nemnegatív, így a jobb oldalnak is annak kell lennie:

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

- Közös feltétel: $x \geq 1$

2. Megoldás menete:

- Emeljük mindkét oldalt négyzetre:

$$(\sqrt{3x+1})^2 = (x-1)^2$$

- Bontsuk ki a zárójeleket:

$$3x+1 = x^2 - 2x + 1$$

- Rendezzük nullára az egyenletet:

$$x^2 - 5x = 0$$

- Emeljünk ki x-et:

$$x \cdot (x-5) = 0$$

- A lehetséges megoldások:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 5$$

3. Ellenőrzés és Válasz:

- Vizsgáljuk meg a kikötéseket:
 - $x_1 = 0$ nem felel meg az $x \geq 1$ feltételnek (behelyettesítve: $\sqrt{1} = -1$, ami hamis).
 - $x_2 = 5$ megfelel az $x \geq 1$ feltételnek (behelyettesítve: $\sqrt{16} = 4$, ami igaz).

Válasz: Az egyenlet megoldása: $x = 5$

3  Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $2x - 2 > x^2$ **b)** $(2x + 15)^2 + x - 3 \leq 0$

Megoldás:

a) $2x - 2 > x^2$

1. Rendezés standard alakra:

Vonjunk ki mindkét oldalból x^2 -et:

$$-x^2 + 2x - 2 > 0$$

2. Zérushelyek keresése:

Oldjuk meg a $-x^2 + 2x - 2 = 0$ egyenletet!

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4 - 8 = -4$$

3. Elemzés:

- Mivel a diszkrimináns (D) negatív, a kifejezésnek nincs valós zérushelye (nem metszi az x-tengelyt).
- Mivel a főegyüttható negatív ($a = -1$), a parabola lefelé nyílik, és végig az x-tengely alatt marad.
- A kérdés az volt, mikor nagyobb a kifejezés nullánál (mikor van a tengely felett).

Válasz: Nincs megoldás a valós számok halmazán.

b) $(2x + 15)^2 + x - 3 \leq 0$

1. Kifejtés és rendezés:

$$(4x^2 + 60x + 225) + x - 3 \leq 0$$

$$4x^2 + 61x + 222 \leq 0$$

2. Zérushelyek meghatározása:

$$x_{1,2} = \frac{-61 \pm \sqrt{61^2 - 4 \cdot 4 \cdot 222}}{2 \cdot 4} = \frac{-61 \pm \sqrt{3721 - 3552}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{-61 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{-61 \pm 13}{8}$$

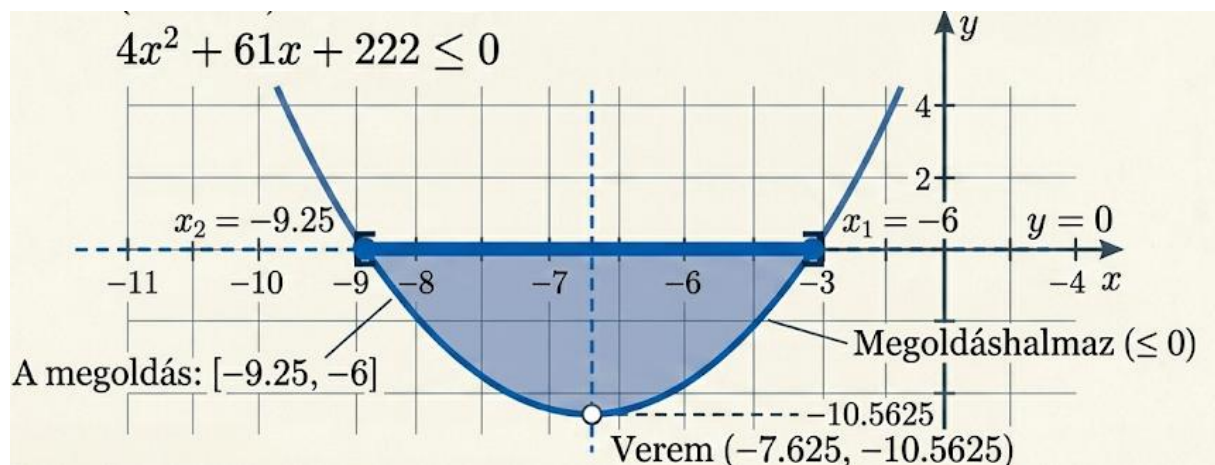
$$\bullet \quad x_1 = \frac{-48}{8} = -6$$

$$\bullet \quad x_2 = \frac{-74}{8} = -9,25$$

3. Intervallum kijelölése:

- A főegyüttható pozitív ($a = 4$), a parabola felfelé nyílik.
- A kifejezés a két zérushely között (és azoknál) negatív vagy nulla.

Válasz: $x \in [-9,25; -6]$



Grafikus elemzés:

A parabola felfelé nyílik (mivel $a=4$).

A megoldáshalmaz az x -tengely alatti ív, beleértve a zérushelyeket is.

Mivel $y = f(x) \leq 0$ feltételt keressük, az eredmény: $x \in [-9.25; -6]$.

4 Egy konvex sokszög átlóinak száma nagyobb, mint 50 és kisebb, mint 100.
Hány oldala lehet ennek a sokszögnek?

Megoldás:

1. Képlet felírása:

Egy n oldalú konvex sokszög átlóinak száma (a) a következő képlettel számítható ki:

$$a = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

2. Az egyenlőtlenség felállítás:

A feladat szerint az átlók száma 50 és 100 közé esik:

$$50 < \frac{n \cdot (n - 3)}{2} < 100$$

3. Megoldás lépésről lépésre:

- Szorozzuk meg az egyenlőtlenséget 2-vel:

$$100 < n^2 - 3n < 200$$

- Keressük meg azokat az n egész számokat, amelyekre ez teljesül!

Próbálkozással vagy a másodfokú összefüggés becslésével:

n (oldalak száma)	$a = \frac{n(n-3)}{2}$ (átlók száma)	Megfelel?
11	$\frac{11 \cdot 8}{2} = 44$	Nem (túl kicsi)
12	$\frac{12 \cdot 9}{2} = 54$	Igen
13	$\frac{13 \cdot 10}{2} = 65$	Igen
14	$\frac{14 \cdot 11}{2} = 77$	Igen
15	$\frac{15 \cdot 12}{2} = 90$	Igen
16	$\frac{16 \cdot 13}{2} = 104$	Nem (túl nagy)

Válasz: A sokszög oldalszáma 12, 13, 14 vagy 15 lehet.

Algebrai megoldás

$$50 < \frac{n^2 - 3n}{2} < 100$$

Ezt két külön részre bontjuk:

I. Rész: $\frac{n^2 - 3n}{2} > 50$

1. Rendezés: $n^2 - 3n - 100 > 0$
2. Zérushelyek meghatározása megoldóképlettel:

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-100)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 400}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{409}}{2} \approx \frac{3 \pm 20,22}{2}$$

- $n_1 \approx 11,61$
- $n_2 \approx -8,61$

3. Mivel $n > 0$ és a parabola felfelé nyílik, a megoldás: **$n > 11,61$**

II. Rész: $\frac{n^2 - 3n}{2} < 100$

1. Rendezés: $n^2 - 3n - 200 < 0$
2. Zérushelyek meghatározása megoldóképlettel:

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-200)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 800}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{809}}{2} \approx \frac{3 \pm 28,44}{2}$$

- $n_3 \approx 15,72$
- $n_4 \approx -12,72$

3. Mivel $n > 0$ és a parabola felfelé nyílik, a megoldás: **$n < 15,72$**

III. Összegzés

A két feltétel közös része:

$$11,61 < n < 15,72$$

Mivel az oldalak száma (n) csak pozitív egész szám lehet, a halmaz elemei:

$$n \in \{12, 13, 14, 15\}$$

Válasz: A sokszög oldalszáma 12, 13, 14 vagy 15 lehet.

TUDÁSPRÓBA

1. Írd fel gyöktényezős alakban a következő kifejezéseket!

a) $x^2 - 18x + 72$

b) $10x^2 + 57x - 18$

Megoldás:

A gyöktényezős alak képlete: $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, ahol a a főegyüttható, x_1 és x_2 a kifejezés zérushelyei.

a) $x^2 - 18x + 72$

1. Zérushelyek meghatározása (megoldóképlettel):

$a = 1, b = -18, c = 72$

$$x_{1,2} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 72}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{18 \pm 6}{2}$$

• $x_1 = \frac{18+6}{2} = 12$

• $x_2 = \frac{18-6}{2} = 6$

2. Felírás gyöktényezős alakban:

Mivel $a = 1$, a forma: $1 \cdot (x - 12) \cdot (x - 6)$

Válasz: $(x - 12) \cdot (x - 6)$

b) $10x^2 + 57x - 18$

1. Zérushelyek meghatározása:

$a = 10, b = 57, c = -18$

$$x_{1,2} = \frac{-57 \pm \sqrt{57^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-18)}}{2 \cdot 10}$$

$$x_{1,2} = \frac{-57 \pm \sqrt{3249 + 720}}{20} = \frac{-57 \pm \sqrt{3969}}{20} = \frac{-57 \pm 63}{20}$$

• $x_1 = \frac{-57+63}{20} = \frac{6}{20} = 0,3$

• $x_2 = \frac{-57-63}{20} = \frac{-120}{20} = -6$

2. Felírás gyöktényezős alakban:

Itt $a = 10$, a forma: $10 \cdot (x - 0,3) \cdot (x - (-6))$

Válasz: $10 \cdot (x - 0,3) \cdot (x + 6)$

2. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletet!

$$\sqrt{5x+1} = x+1$$

Megoldás:

1. Értelmezési tartomány és kikötések:

- A négyzetgyök alatt nem állhat negatív szám:

$$5x+1 \geq 0 \Rightarrow 5x \geq -1 \Rightarrow \mathbf{x \geq -0,2}$$

- A négyzetgyök értéke definíció szerint nemnegatív, ezért a jobb oldalnak is annak kell lennie:

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x \geq -1}$$

- Közös feltétel: $\mathbf{x \geq -0,2}$

2. Megoldás menete:

- Emeljük mindkét oldalt négyzetre:

$$(\sqrt{5x+1})^2 = (x+1)^2$$

- Bontsuk ki a zárójelet a jobb oldalon (nevezetes azonosság):

$$5x+1 = x^2 + 2x + 1$$

- Rendezzük nullára az egyenletet:

$$x^2 - 3x = 0$$

- Emeljünk ki x -et:

$$x \cdot (x-3) = 0$$

- A szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla:

$$\mathbf{x_1 = 0}$$

$$\mathbf{x_2 = 3}$$

3. Ellenőrzés:

- Ellenőrizzük a feltételt ($x \geq -0,2$): Mindkét érték megfelel.

- Behelyettesítés az eredeti egyenletbe:

- Ha $x = 0$: $\sqrt{5 \cdot 0 + 1} = 0 + 1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1$ (Igaz)

- Ha $x = 3$: $\sqrt{5 \cdot 3 + 1} = 3 + 1 \Rightarrow \sqrt{16} = 4$ (Igaz)

Válasz: Az egyenlet megoldásai a valós számok halmazán: $\mathbf{x_1 = 0}$ és $\mathbf{x_2 = 3}$.
--

4. Egy másodfokú függvénynek két zérushelye van a valós számok halmazán: 3 és 7, főegyütthatója -2 .

- a) Írd fel a függvény hozzárendelési szabályát!
- b) Határozd meg a függvény szélsőérték helyét és szélsőértékét!
- c) Ábrázold a függvény grafikonját!

Megoldás:

Adatok:

- Zérushelyek: $x_1 = 3$ és $x_2 = 7$
- Főegyüttható: $a = -2$

a) Írd fel a függvény hozzárendelési szabályát!

A másodfokú függvény gyöktényezős alakja: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Behelyettesítve az adatokat:

$$f(x) = -2 \cdot (x - 3) \cdot (x - 7)$$

Ha általános alakban szeretnénk megadni (zárójelbontás után):

$$f(x) = -2 \cdot (x^2 - 7x - 3x + 21) = -2 \cdot (x^2 - 10x + 21)$$

$$f(x) = -2x^2 + 20x - 42$$

b) Szélsőérték hely és szélsőérték meghatározása

1. Szélsőérték hely (x_v):

Mivel a másodfokú függvény parabolája szimmetrikus, a szélsőérték hely a két zérushely számtani közepe (pontosan félúton van közöttük).

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

2. Szélsőérték (y_v):

Ezt a szélsőérték hely függvénybe való behelyettesítésével kapjuk meg:

$$f(5) = -2 \cdot (5 - 3) \cdot (5 - 7) = -2 \cdot 2 \cdot (-2) = 8$$

Következtetés:

Mivel a főegyüttható negatív ($a = -2$), a függvénynek **maximuma** van.

- Maximum hely: $x = 5$
- Maximum érték: $y = 8$

c) Függvényábrázolás lépésről lépésre

A függvényünk: $f(x) = -2(x - 3)(x - 7)$

A függvény ábrázolásához a következő pontokat használjuk:

- Zérushelyek: $(3; 0)$ és $(7; 0)$
- Tengelypont (csúcspont): $(5; 8)$
- Tengelymetszet (y-tengely): $f(0) = -42$ (tehát a $(0; -42)$ pont)

1. Alappontok kijelölése:

- Zérushelyek:

Mivel a zérushelyek 3 és 7, a grafikon átmegy a $(3; 0)$ és $(7; 0)$ pontokon.

- Tengelypont (Csúcspont):

A b) részben kiszámoltuk, hogy a maximumhely 5, az értéke pedig 8. Ez a $(5; 8)$ pont.

2. Segédpontok a pontosabb rajzhoz:

- Szimmetrikus pontok:

Az $x = 4$ és $x = 6$ helyeken a függvény értéke egyaránt 6.

Így a $(4; 6)$ és $(6; 6)$ pontokat is bejelölheted.

$$4\text{-nél: } f(4) = -2(4 - 3)(4 - 7) = -2 \cdot 1 \cdot (-3) = 6.$$

$$f(6) = 6.$$

- Metszéspont az y-tengellyel:

A görbe nagyon mélyen, az $y = -42$ értéknél metszi a függőleges tengelyt

$$f(0) = -2(0 - 3)(0 - 7) = -2 \cdot (-3) \cdot (-7) = -42.$$

(ezt elég csak jelezni a görbe irányával)

3. A görbe megrajzolása:

- Mivel a főegyüttható negatív (-2) , a parabola lefelé nyílik



5 Egy üzemben többféle terméket gyártanak. Az egyik termékükből x darab előállításának költsége $k(x) = x^2 + 3120$ (euró). Ezt a terméket 113 euróért árulják. Hány darab termék gyártása esetén lesz nyereséges ez a termékük? (Feltesszük, hogy el is tudják adni, amit előállítanak.)

Megoldás:

Adatok:

- Költségfüggvény: $k(x) = x^2 + 3120$ (euró)
- Eladási ár: 113 euró/darab
- Bevételi függvény: $b(x) = 113x$

1. A nyereségfeltétel felírása

A gyártás akkor nyereséges, ha a bevétel nagyobb, mint az előállítási költség:

$$b(x) > k(x)$$

$$113x > x^2 + 3120$$

2. Az egyenlőtlenség megoldása

Rendezzük az egyenlőtlenséget nullára:

$$-x^2 + 113x - 3120 > 0$$

Határozzuk meg a zérushelyeket a megoldóképlettel:

$$x_{1,2} = \frac{-113 \pm \sqrt{113^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3120)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-113 \pm \sqrt{12769 - 12480}}{-2} = \frac{-113 \pm \sqrt{289}}{-2} = \frac{-113 \pm 17}{-2}$$

- $x_1 = \frac{-113+17}{-2} = \frac{-96}{-2} = 48$
- $x_2 = \frac{-113-17}{-2} = \frac{-130}{-2} = 65$

3. Értelmezés

Mivel a másodfokú tag főegyütthatója negatív ($a = -1$), a függvény grafikonja egy lefelé nyíló parabola. A kifejezés a két zérushely között pozitív.

Tehát a nyereségesség feltétele: **$48 < x < 65$**

Válasz:

A termék gyártása 49 és 64 darab közötti mennyiség esetén lesz nyereséges.

(Mivel a szélsőértékeken a nyereség pontosan 0, ezért a határokat nem számoljuk bele.)
